

Title	Reflexive vector latticeのNormに就て
Author(s)	中野, 秀五郎
Citation	全国紙上数学談話会. 2(6) p.159-p.165
Issue Date	1947-08-02
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75195
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

60. Reflexive vector lattice の Norm に就て

中野 秀五郎

順序空間 \mathcal{S} space \mathcal{M} とは *vector lattice* であり、任意の正要素の集合 $\{a_\lambda\}$ に対して $\bigwedge_{\lambda \in A} a_\lambda$ が存在するものとし \mathcal{M}_+ が \mathcal{M} の *subspace* であるとは $\mathcal{M}_+, \exists a, |a| \leq |b|$ に対して $\phi \in \mathcal{M}_+$ が成立する *linear space* を意味するものとする。Space \mathcal{M} における *linear functional* L が連続であるとは、 $\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = a$ に対して $\lim_{\nu \rightarrow \infty} L(a_\nu) = L(a)$ が成立することである。又 L が連続で且 $\bigwedge_{\lambda \in A} a_\lambda = 0$ に対して常に

$$\inf |L(a_{\lambda_1} \wedge a_{\lambda_2} \wedge \dots \wedge a_{\lambda_n})| = 0 \quad (n=1, 2, \dots, \lambda_\nu \in A)$$

あるとき、 \mathcal{M} は汎連続であるといふ。Space \mathcal{M} の汎連続な linear functional の全体が又 space を形成する。此 space を \mathcal{M} の conjugate space と呼び、 $\overline{\mathcal{M}}$ にて表はすこととする。 \mathcal{M} の conjugate space $\overline{\mathcal{M}}$ を考へるときは、 \mathcal{M} は $\overline{\mathcal{M}}$ の subspace となる。特に \mathcal{M} と $\overline{\mathcal{M}}$ と一致するとき \mathcal{M} reflexive であるといふ。任意の space \mathcal{M} の conjugate space は 必ず reflexive となるのである。(中野孝五郎: Stetige linear Funktionale auf dem teilweise geordneten Modul. 東大紀要. 1942. 第2期) Reflexive space \mathcal{M} 及び其 conjugate $\overline{\mathcal{M}}$ に norm が導入されて

$$\|a\| = \sup_{\|\bar{a}\| \leq 1} |\bar{a}(a)|, \quad \|\bar{a}\| = \sup_{\|a\| \leq 1} |\bar{a}(a)| \quad (a \in \mathcal{M}, \bar{a} \in \overline{\mathcal{M}})$$

が満足されるとき、 \mathcal{M} は reflexive norm を有するといふ。此処で証明する事なることは reflexive space \mathcal{M} が reflexive norm を有するときは 其 norm は同等の任意に一意的に決定され、然るも \mathcal{M} は其 norm に關して complete である。 逆に \mathcal{M} が complete な norm を有するときは、 \mathcal{M} は reflexive norm を有する。次に space \mathcal{M} の有限個の subspace $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n$ が悉く reflexive で且 reflexive norm を有するときは、共通部分 $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n$ も亦 reflexive で且 reflexive norm を有する。然し subspace 列 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots$ に對しては、 $\mathcal{M}_0 = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}_i$ が complete element p ($p \wedge x = 0 \rightarrow x = 0$) を含めば、 \mathcal{M}_0 は reflexive ではあるが決して reflexive norm を有さない。勿論此場合 \mathcal{M}_0 は $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots$ の有限個の共通部分とは一致しないとする。例へば区間 $(0, 1)$ で measure zero が一致する有限個の total additive measure m_1, \dots, m_n に對し

$$\int_0^1 |\varphi(x)|^{p_v} dm_v < +\infty \quad (p_v \geq 1, v=1, 2, \dots, n)$$

なるが如き measurable function $\varphi(x)$ の全体は reflexive space で reflexive norm を有する。然し Lebesgue measure m に對し ε を如何なる正数とするも

$$\int_0^1 |\varphi(x)|^{p-\varepsilon} dm < +\infty \quad (p > 1)$$

なるが如き、 $\varphi(X)$ の全体は, reflexive spaceではあるが, reflexive normを有さない。又 reflexive spaceで全然 normを有さない例としては、幾何の数列 $a(a_1, a_2, \dots)$ より成る space が挙げられる。此 conjugate space は有暇個を除いて零なる数列 $\bar{a}(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots)$ にして、 $\bar{a}(a) = \sum_{v=1}^{\infty} \bar{a}_v a_v$ である。如何となれば、 ν 番目が1で他が0なる数列を e_ν とし、若し ν も norm が存在するとすれば $a = (\frac{1}{\|e_1\|}, \frac{2}{\|e_2\|}, \dots)$ に對し、 $\|a\| \geq \|\sum_{v=1}^{\nu} \frac{1}{\|e_v\|} e_v\| = \nu$ ($\nu=1, 2, \dots$) となりて矛盾する。此處に norm とは、1) $0 \leq \|a\| < +\infty$, $\|a\|=0 \rightarrow a=0$, 2) $\|\alpha a\| = |\alpha| \|a\|$, 3) $|\alpha| \leq |\beta|$ ならば $\|a\| \leq \|b\|$ 4) $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$ を満足するものとする。次に定理の形で證明することとする。

定理 1 Reflexive space \mathcal{M} 及び其の conjugate $\overline{\mathcal{M}}$ が共に norm を有し、 $\|a\| = \sup_{\|\bar{a}\| \leq 1} |\bar{a}(a)|$ ($a \in \mathcal{M}$) なるときは $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots$, $\sup \|a_v\| < +\infty$, $a_v \in \mathcal{M}$ に對し、 $\lim_{v \rightarrow \infty} a_v = a$, $\lim_{v \rightarrow \infty} \|a_v\| = \|a\|$ なる $a \in \mathcal{M}$ が存在する。

証明 $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots$, $\sup \|a_v\| \leq \alpha$ に對しては、 $\bar{a}(a_v) \leq \|\bar{a}\| \cdot \|a_v\| \leq \alpha \|\bar{a}\|$ なるを以て $P(\bar{a}) = \lim_{v \rightarrow \infty} \bar{a}(a_v)$ と置くことにより $\overline{\mathcal{M}}$ に於ける positive linear functional P が得られる。此 P が $\overline{\mathcal{M}}$ に於て連続なることが容易に証明される。故に $P = \bar{a} \in \overline{\mathcal{M}}$ なる \bar{a} が存在し、此如き \bar{a} に對しては 明かに $\lim_{v \rightarrow \infty} \bar{a}(a_v) = \bar{a}(a)$ である。然かも任意の正数 ε に對し、

$$\bar{a}(a) > \|a\| - \varepsilon, \quad \|\bar{a}\| = 1 \quad 0 \leq \bar{a} \in \overline{\mathcal{M}}$$

なる \bar{a} が存在すべきを以て、 $\lim_{v \rightarrow \infty} \|a_v\| \geq \lim_{v \rightarrow \infty} \bar{a}(a_v) = \bar{a}(a) > \|a\| - \varepsilon$ が成立する。故に $\lim_{v \rightarrow \infty} \|a_v\| = \|a\|$ である。

定理 2 Space \mathcal{M} に norm が定義され、 $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots$, $\sup \|a_v\| < \infty$ に對し、 $a_v \leq a$, $\|a\| = \lim_{v \rightarrow \infty} \|a_v\|$ なる a が存在するときは、 \mathcal{M} は此 norm に關して complete である。

証明 Cauchy sequence a_1, a_2, \dots に對しては、 $\|a_{\mu_v} - a_{\mu_v-1}\| \leq \frac{1}{2^v}$ なる subsequence $a_{\mu_1}, a_{\mu_2}, \dots$ が存在する。今 $b_v = \sum_{p=2}^v |a_{\mu_p} - a_{\mu_{p-1}}|$ と置くときは、明かに $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots$, $\|b_v\| \leq \sum_{p=2}^v \|a_{\mu_p} - a_{\mu_{p-1}}\|$

重なるを以て、假定により $\sum_{p=2}^{\infty} |a_{\mu_p} - a_{\mu_{p-1}}|$ は収斂する。故に $a = a_{\mu_1} + \sum_{p=2}^{\infty} (a_{\mu_p} - a_{\mu_{p-1}})$ と置くときは、

$|a - a_{\mu_\nu}| \leq \sum_{p=1}^{\infty} |a_{\mu_{p+1}} - a_{\mu_p}|, \quad \left\| \sum_{p=1}^{\infty} |a_{\mu_{p+1}} - a_{\mu_p}| \right\| \leq \frac{1}{2^{\nu-1}}$ なるを以て、又假定により $\|a - a_{\mu_\nu}\| \leq \frac{1}{2^{\nu-1}}, (\nu = 1, 2, \dots)$ が成立する。故により $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|a_\nu - a\| = 0$ が得られる。

Mantorovitch は 此定理に於て、更に $a_1, a_2, a_3, \dots, \lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = 0$ ならば、 $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|a_\nu\| = 0$ なる假定を入れて証明した。然し此定理は其れより本質的に廣いことは M -space を思へば明かである。

定理 3 Space \mathcal{M} が前定理に於けるが如き二つの Norm $\|a\|_1, \|a\|_2$ を有するときは 此二つの norm は同等である。(即ち $\|a\|_1 \leq \alpha \|a\|_2, \|a\|_2 \leq \beta \|a\|_1$ なる α, β が存在する。)

証明 $\|a_\nu\|_1 = 1, \|a_\nu\|_2 \geq 2^\nu (\nu = 1, 2, \dots)$ とすれば、 $\left\| \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} a_\nu \right\| \leq 1$ なるべきを以て、假定により $a = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} a_\nu$ なる a が存在する。然るときは $\|a\|_2 \geq \frac{1}{2^\nu} \|a_\nu\|_2 \geq 2^\nu (\nu = 1, 2, \dots)$ となつて矛盾する。

定理 4 Reflexive space \mathcal{M} に reflexive norm が存在する爲の必要且つ充分なる條件は 各 $a \in \mathcal{M}$ に正数 α_a を對應せしめるときは、任意の $\bar{a} \in \bar{\mathcal{M}}$ に對し、 $\sup_{a \in \mathcal{M}} |\bar{a}(\alpha_a a)| < +\infty$ なることである。

証明 \mathcal{M} が reflexive norm を有するときは、 $\alpha_a = \frac{1}{\|a\|}$ ($a \neq 0$) を對應せしめれば、明かに $\sup_{a \in \mathcal{M}} |\bar{a}(\alpha_a a)| \leq \|\bar{a}\|$ である。逆に定理を述べるが如き α_a が存在するときは

$\|\bar{a}\|_1 = \sup_{a \in \mathcal{M}} |\bar{a}(a)|, \quad \|a\| = \sup_{\|\bar{a}\|_1 \leq 1} |\bar{a}(a)|, \quad \|\bar{a}\| = \sup_{\|a\| \leq 1} |\bar{a}(a)|$ と置くときは、 $\|\bar{a}\| = \sup_{\|\bar{a}\|_1 \leq 1} |\bar{a}(a)|$ が証明される。

此定理より次の定理が得られる。

定理 5 Reflexive space \mathcal{M} が complete な norm を有すれば \mathcal{M} は reflexive norm を有する。

証明 \mathcal{M} が complete norm を有すれば任意の positive linear functional P に對し、 $|P(a)| \leq \alpha \|a\|$ なる α が存在する。如何となれば $\|a_\nu\| = 1, P(a_\nu) \geq 2^\nu, a_\nu \geq 0$ とすれば $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} \|a_\nu\| \leq 1$ なるを以て、仮

定理より $b_v = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\mu} a_\mu$ と置くときは $\lim_{v \rightarrow \infty} \|a - b_v\| = 0$ である。然るに、

$$\frac{1}{2} \|(a - b_\mu) - b_v\| \leq \frac{1}{2} \|a - b_v\| \quad (v \geq \mu)$$

なるべきを以て $a \sim b_\mu = a$, 即ち $a \in b_\mu$ ($\mu=1, 2, \dots$) である。故に、

$p(a) \geq p(b_\mu) \geq \frac{1}{2}$ ($v=1, 2, \dots$) となつて矛盾する。 $\alpha a = \frac{1}{\|a\|} (a \neq 0)$

と置くときは前定理により \mathcal{M} が reflexive norm を有することが知られる。

定理 6 Space \mathcal{M} の subspace $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ が共に reflexive で reflexive norm を有するときは、共通部分 $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$ も本 reflexive norm を有する。

証明 Conjugate $\overline{\mathcal{M}_1}, \overline{\mathcal{M}_2}$ を含む最小な linear space を $\overline{\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2}$ とすれば、明かに $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ は $\overline{\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2}$ の conjugate space なるを以て、 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ は reflexive である。又 \mathcal{M}_1 の norm $\|a\|_1$ 及び \mathcal{M}_2 の norm $\|a\|_2$ に對し、

$$\|a\| = \|a\|_1 + \|a\|_2 \quad (a \in \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2)$$

と置くときは、此 norm $\|a\|$ が定理 2 の條件を満足するを以て $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$ は此 norm に關して complete, 従つて前定理により reflexive norm を有する。

Space \mathcal{M} の任意の要素列 a_1, a_2, \dots に對し正数列 $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ を適当に定めて $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n a_n$ を收斂せしめる時 \mathcal{M} を係数完備と云ふ。

Space \mathcal{M} が定理 2 の條件を有する norm を有するときは、 \mathcal{M} は明かに係数完備である。従つて定理 1 により reflexive norm を有するときは \mathcal{M} は係数完備である。

定理 7 Subspace 列 $\mathcal{M}_1 \supset \mathcal{M}_2 \supset \dots$ が悉く係数完備にして、 $\mathcal{M} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}_i$ が \mathcal{M}_i の何れとも異なり、然かも任意の要素 a の projector $[a]$ に對し、 $[a] = [p]$, $p \in \mathcal{M}$ なる p が存在するときは \mathcal{M} は reflexive であるが、其 conjugate $\overline{\mathcal{M}}$ は係数完備ではない。然かも $\overline{\mathcal{M}} = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\mathcal{M}_i}$ である。

証明 $\overline{\mathcal{M}_1} \subset \overline{\mathcal{M}_2} \subset \dots, \overline{\mathcal{M}} \supset \overline{\mathcal{M}_i}$ ($i=1, 2, \dots$) なることは明かである。先づ $\overline{\mathcal{M}} = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\mathcal{M}_i}$ を証明する。然しも $0 \leq \alpha_0 \in \overline{\mathcal{M}}$, $\alpha_0 \in \overline{\mathcal{M}_i}$ ($i=1, 2, \dots$)

なる \bar{a}_0 が存在したとする。然るときは、

$$\bar{a}_0(a_\nu) = +\infty \quad 0 \leq a_\nu \in \mathcal{M}_\nu \quad \text{即ち} \quad \sup_{\mathcal{M}_\nu} \bar{a}(a_\nu) = +\infty$$

なる a_ν が存在する。假定により \mathcal{M}_ν は保数完備なるを以て、

$$b_\mu = \sum_{\nu=\mu}^{\infty} \alpha_{\mu,\nu} a_\nu \in \mathcal{M}_\mu \quad (\mu = 1, 2, \dots)$$

なる正数 $\alpha_{\mu,\nu}$ が得られる。然かも $\mathcal{M}_\mu \supset \mathcal{M}_{\mu+1}$ より

$$\alpha_{1,\nu} \geq \alpha_{2,\nu} \geq \dots \geq \alpha_{\nu,\nu} > 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

ならしめ得る。然るときは、明かに $b_1 \geq b_2 \geq \dots$, $b_\nu \in \mathcal{M}_\nu$, $\bar{a}(b_\nu) = +\infty$

である。又 $[b_1] = [p]$, $0 \leq p \in \mathcal{M}$ なる p に對し、第二スペクトル論によ

り \mathcal{M} の Eigensystem \mathcal{E} に対して

$$b_\nu = \int \varphi_\nu(p) d\mathcal{E} p$$

なる正連続函数 $\varphi_\nu(p)$ が存在する。然かも $\varphi_1(p) \geq \varphi_2(p) \geq \dots$ にして、

$$[p_1] \leq [p_2] \leq \dots, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} [p_\nu] = [p]$$

にして $\varphi_\nu(p)$ が $[p_\nu]$ に對應する近傍 $\cup [p_\nu]$ にて有界となり、

$$b_\nu = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_{[p_\mu]} \varphi_\nu(p) d\mathcal{E} p \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

が成立する。

$$\bar{a}(b_\nu) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_{[p_\mu]} \varphi_\nu(p) \bar{a}(d\mathcal{E} p) = +\infty$$

なるべきを以て、subsequence $[p_{\mu_1}] \leq [p_{\mu_2}] \leq \dots$ を選定して定め、

$$\int_{[p_{\mu_\nu}] - [p_{\mu_{\nu-1}}]} \varphi_\nu(p) \bar{a}(d\mathcal{E} p) \geq \nu \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

ならしめ得る。然るときは、

$$\varphi(p) = \varphi_\nu(p) \quad (p \in \cup [p_{\mu_\nu}] - [p_{\mu_{\nu-1}}])$$

として連続函数 $\varphi(p)$ を定めるときは

$$0 \leq \varphi(p) \leq \varphi_\nu(p) \quad (p \in \cup [p] - \cup [p_\nu])$$

なるべきを以て、

$$p_0 = \int_{[p]} \varphi(p) d\mathcal{E} p \in \mathcal{M}_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

である。故に $p_0 \in \mathcal{M}$ にして、然かも

$$\bar{a}(p_0) = \int_{[p]} \varphi(p) \bar{a}(d\mathcal{E} p) \geq \int_{[p_{\mu_\nu}]} \varphi_\nu(p) \bar{a}(d\mathcal{E} p) \geq \nu \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

となり。

$\bar{a}(p_0) < +\infty$ に矛盾する。次に $\overline{\mathcal{M}}$ が係数完備でないことを証明する。

$\overline{\mathcal{M}} \ni \bar{a}_\nu \in \mathcal{M}_{\nu-1}$ なる正要素 \bar{a}_ν ($\nu=1, 2, \dots$) を考えるときは 若しも $\overline{\mathcal{M}}$ が係数完備であるとすれば $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \bar{a}_\nu \in \overline{\mathcal{M}}$ なる正数 α_ν が存在し、従つて適宜な μ に對し $\alpha_{\mu+1} \bar{a}_{\mu+1} \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \bar{a}_\nu \in \mathcal{M}_\mu$ なるべきを以て、 $\bar{a}_{\mu+1} \in \mathcal{M}_\mu$ となつて矛盾する。

Space \mathcal{M} が norm を有し、其 norm が Kantorovich の條件即ち定理 2 の條件と $a_1, a_2, a_3, \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\| = 0$ なる條件を満足するとき、 \mathcal{M} が reflexive として reflexive norm を有することは既に証明されてゐる。此如き二つの space $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ が互に他の conjugate である爲の條件として次の定理が成立する。

定理 8 Space $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ が Kantorovich の norm を有し、又 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ の間に bilinear form $B(a_1, a_2)$ が定義せられて
1) $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0$ ならば $B(a_1, a_2) \leq 0$, 2) $\|a_1\| = \sup_{a_2 \in \mathcal{M}_2} |B(a_1, a_2)|$,
 $\|a_2\| = \sup_{a_1 \in \mathcal{M}_1} |B(a_1, a_2)|$, 3) 任意の $0 \neq a_1 \in \mathcal{M}_1$ に對し、 $B(a_1, a_2) \neq 0$ として、 $|a_1| \wedge x_1 = 0$ ならば、 $B(x_1, a_2) = 0$ なるが如き $a_2 \in \mathcal{M}_2$ が存在し、又 $a_2 \in \mathcal{M}_2$ に對しても同様な $a_1 \in \mathcal{M}_1$ が得られるときは \mathcal{M}_1 と \mathcal{M}_2 とは互に他の conjugate である。

証明 \mathcal{M}_1 の conjugate space $\overline{\mathcal{M}}_1$ は \mathcal{M}_2 を含む。然かも \mathcal{M}_2 の norm が $\overline{\mathcal{M}}_1$ として一致することは 2) より容易に証明される。又 3) 及び norm の對定理により、 $\overline{\mathcal{M}}_1$ が \mathcal{M}_2 と其れに直交するものとの直和なることが知られる。 \mathcal{M}_2 に直交する要素 \bar{a}_1 に對しては、conjugate の性質より $\bar{a}_1(a_1) \neq 0$, 1) によつて然かも $B(a_1, a_2) = 0$ ($a_2 \in \mathcal{M}_2$) なる a_1 が存在することが証明される。故に 2) により $\|a_1\| = 0$ なりて、 $\bar{a}_1 = 0$ 。従つて $\overline{\mathcal{M}}_1 = \mathcal{M}_2$ が知られる。

此定理 8 の應用としては、 L_p と L_q ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p, q \geq 1$) が互に他の conjugate なることが直ちに得られる。又定理 8 は Kantorovich の norm より広い norm に関して拡張せられるが、此處には略することとする。

(1947. 8. 2)